

KOMMENTAR TILL CARL R. WERNS KONSTRUKTION AV DET KLASSISKA PROBLEMET VINKELNS TREDELNING

Uppgiften att med endast passare och omärkt linjal tredela en godtycklig vinkel är inte helt entydig eftersom man kan tillåta endast låsta passare eller även omställbara passare, varmed konstruerade sträckor flyttas. Visserligen försämrars den rittekniska precisionen vid omställning men även bland klassiska konstruktioner finns såväl sådana som kräver omställning som sådana som kan utföras med låst passare. Vinkelns tvådelning är en av de sistnämnda medan triangelns omskrivna och inskrivna cirklar måste utföras med omställning av passaren. Och även om det inte är tillåtet med graderad linjal kan man alltid längs en rät linje avsätta lika långa sträckor i följd med låst passare.

Ingenjör Carl R. Werns konstruktion avser delning vid vertex i tre delar av en given, godtycklig vinkel, fastän en vinkel konstrueras genom att en sträcka flyttas m.h.a. omställbar passare. Jämför med Utmaning (nedan). Den använda linjalen är inte graderad och graderas inte.

En godtycklig vinkel mindre än 108° delas av Werns konstruktion så, att varje delvinkel avviker från tredjedelen med mindre än en bågminut vilket motsvarar mindre än 1 mm längs periferin på en cirkel med 3 m radie. (Skall en större vinkel tredelas, tudelas den först erforderligt antal gånger.) Är vinkeln högst 16° blir var och en av avvikelserna mindre än en bågsekund o.s.v. För åtskilliga praktiska ändamål torde därmed Werns delning vara att anse som en perfekt tredelning.

Man vinner i tydlighet genom att skilja mellan vinkel och riktning. Riktning är vinkeln, räknad positiv moturs och negativ medurs, mellan en från början vald referenshalvstråle och aktuell halvstråle. Tallinjens motsvarighet är avståndet från noll till en punkt, med tecken. (På sjön kallas riktning för bäring och räknas positiv medurs, med nordriktningen som referensriktning.)

En vinkel är belägen mellan två riktningar. Vinkelns värde är differensen mellan två riktningar, med tecken. Tallinjens motsvarighet är sträcka. En sträcka kan räknas med tecken. En vinkel kan vara orienterad hursomhelst och en sträcka kan vara belägen varsomhelst på tallinjen.

(En sektor, slutligen, är en vinkel begränsad av en cirkelbåge med centrum i vertex.)

Den vinkel som skall delas är $\sphericalangle ABC$ (se fig. 1 i denna kommentar) vars värde här betecknas $2v$. Närmare bestämt är $\sphericalangle ABC = \sphericalangle KBC - \sphericalangle KBA = v - (-v) = 2v$. Delningen är gjord genom att man konstruerat två halvstrålar BR_1 och BW_1 sådana att $\sphericalangle KBR_1 \approx v/3$ och $\sphericalangle KBW_1 \approx -v/3$. För tydlighetens skull är i figuren $2v$ vald betydligt större än 108° , nämligen $2v = 150^\circ$.

Werns beteckningar i grotesk (Helvetica) har bibehållits i denna kommentar.

F definieras som skärningen mellan de rätta linjerna 5 och 6. Med E betecknas skärningen mellan cirkel 1 och cirkel 7.

Sträckan AC, normal till symmetrilinjen DHBK, skär densamma en punkt vilken här betecknas P. Eftersom trianglarna DHF och DPC är likformiga inser man att

$$HF = \frac{\sin v}{2 + \cos v} \quad (1)$$

Med centrum i H ritas den lilla cirkeln (7) genom F. En radie i denna cirkel kommer också att utgöra en korda HE i den stora cirkeln 1. HE är då bas i en likbent triangel ΔHBE med den konstruerade vinkeln $\angle EBH$ som toppvinkel. Obs. att $\angle EBH = \angle WBK = \angle KBR$. Dessas storlek betecknas w . Således är

$$2 \sin \frac{w}{2} = \frac{\sin v}{2 + \cos v} \quad (2)$$

varvid i detta steg av Werns konstruktion erhålles

$$w = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{\sin v}{2 + \cos v} \right) \quad (3)$$

Differensen $w - v/3$ visas i fig. 2 samt i tabell 1. Den anmärkningsvärt höga överensstämmelsen i detta steg med en perfekt tredelning upp till $v \approx 50^\circ$ ger anledning att söka de första termerna i en serieutveckling av högerledet i (3)

$$2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{\sin v}{2 + \cos v} \right) = A_1 v + A_3 v^3 + \dots \quad (4)$$

(Endast udda potenser förekommer.) Obs. att vinklarna i de följande beräkningarna är i radianer medan de i tabellen ju är i grader.

För serieutvecklingen skriver man först om högerledet i (2) som

$$\frac{\sin v}{2 + \cos v} = \frac{\sin v}{3 - (1 - \cos v)} = \frac{1}{3} \frac{\sin v}{1 - \frac{1}{3}(1 - \cos v)} \quad (5)$$

Därefter skall man utveckla i serie

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3}(1 - \cos v)} = 1 + \frac{1}{3} (1 - \cos v) + \frac{1}{3^2} (1 - \cos v)^2 + \dots \quad (6)$$

Först utvecklar man

$$1 - \cos v = \frac{v^2}{2} - \dots \quad (7)$$

$$(1 - \cos v)^2 = \left(\frac{v^2}{2} - \dots \right)^2 = \mathcal{O}(v^4) \quad (8)$$

Då kan (6) skrivas om som

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3}(1 - \cos v)} = 1 + \frac{1}{3} \frac{v^2}{2} + \dots \quad (9)$$

Eftersom

$$\sin v = v - \frac{v^3}{6} + \dots$$

$$\text{får man} \quad (10)$$

$$\frac{\sin v}{1 - \frac{1 - \cos v}{3}} = \left(v - \frac{v^3}{6} + \dots \right) \left(1 + \frac{v^2}{3 \cdot 2} + \dots \right) = v + \mathcal{O}(v^5) \quad (11)$$

Man sätter sedan in faktorn $1/3$ från (5) varvid (2) blir

$$2 \sin \frac{w}{2} = \frac{\sin v}{2 + \cos v} = \frac{1}{3} \frac{\sin v}{1 - \frac{1 - \cos v}{3}} = \frac{v}{3} + \mathcal{O}(v^5) \quad (12)$$

Det noteras att tredjegradstermen försvinner och att så inte blir fallet om Werns metod skulle användas för att dela i något annat antal delar än tre.

Högerledet i (12) sätts in i (3)

$$w = 2 \arcsin \left[\frac{1}{2} \frac{v}{3} + \mathcal{O}(v^5) \right] \quad (13)$$

$$\text{Serieutvecklingen för } \arcsin t = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{40}t^5 + \frac{5}{112}t^7 + \dots \quad (14)$$

$$2 \arcsin \frac{t}{2} = t + \frac{1}{24}t^3 + \frac{3}{640}t^5 + \frac{5}{7168}t^7 + \dots \quad (15)$$

Således är

$$w = \frac{v}{3} + \mathcal{O}(v^5) + \frac{1}{24} \left[\frac{v}{3} + \mathcal{O}(v^5) \right]^3 + \dots = \frac{v}{3} + \frac{v^3}{648} + \dots \quad (16)$$

Man ser att tredjegradskoefficienten i (16) härrör endast från insättandet i (15) av förstagskoefficienten från (13) och att tredjegradskoefficienten inte annars säkert skulle få ett så litet värde. Det, samt att det endast är halva toppvinkeln i ΔEBH som beräknas, kan ses som något slags orsak till den exceptionella noggrannheten hos Werns konstruktion för små vinklar.

Utan härledning lämnas serieutvecklingens (4) följande två koefficienter:

$$A_5 = \frac{-19}{2^7 \cdot 3^4} = \frac{-19}{10368}$$

$$A_7 = \frac{-2753}{2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5} = \frac{-2753}{11197440}$$

Det finns andra sätt att kontrollera koefficienternas riktighet än att utföra härledningarna, något som lämnas åt läsarens uppfinningsrikedom.

I fig. 3, som talar för sig själv, visas

$$2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{\sin v}{2 + \cos v} \right) - \frac{v}{3} \quad (17)$$

$$A_1 v + A_3 v^3 + A_5 v^5 + A_7 v^7 - \frac{v}{3} = A_3 v^3 + A_5 v^5 + A_7 v^7 \quad (18)$$

$$A_1 v + A_3 v^3 + A_5 v^5 - \frac{v}{3} = A_3 v^3 + A_5 v^5 \quad (19)$$

$$A_1 v + A_3 v^3 - \frac{v}{3} = A_3 v^3 \quad (20)$$

Werns vinkel w används nu för att dela ursprungsvinkeln $2v$ enligt nedan. Härför konstruerar man bisektriserna BR_1 till $\angle WBC$ och BW_1 till $\angle RBA$.

$$\angle KBC = v$$

$$\angle KBA = -v$$

$$\angle KBR = w$$

$$\angle KBW = -w$$

$$\angle KBR_1 = \frac{1}{2}(\angle KBW + \angle KBC) = \frac{-w + v}{2} \approx \frac{v}{3} \quad (21)$$

$$\angle KBW_1 = \frac{1}{2}(\angle KBA + \angle KBR) = \frac{-v + w}{2} \approx -\frac{v}{3} \quad (22)$$

$$\therefore \angle KBW_1 = \frac{1}{2}(\angle KBA + \angle KBR) = \frac{-w + v}{2} - \frac{-v + w}{2} = v - w \approx \frac{2v}{3} \quad (23)$$

$$\therefore \angle R_1BC = \angle ABW_1 = \frac{2v - (v - w)}{2} = \frac{v + w}{2} \approx \frac{2v}{3} \quad (24)$$

Märk att (21) resp. (22) uttrycker en riktning som medelvärde av två riktningar, (23) uttrycker en vinkel som differensen mellan två riktningar och (24) uttrycker en vinkel som hälften av differensen mellan två vinklar.

De uppkomna vinklarna avviker från exakt tredelning till beloppet med lika mycket eller hälften så mycket som i första konstruktionssteget, oaktat att den delade vinkeln är dubbelt så stor. Felet halveras i (21), (22) och (24). Avvikelse efter sista steget framgår av fig. 4 och tabell 2.

Utmaning

Det är möjligt att konstruera Werns vinkel w (ekv. 3) utan att ställa om passaren. Läsaren må själv upptäcka hur.

The diagram illustrates the geometric construction of a hyperbola. It features two foci, B and D , and a vertical transverse axis with vertices A and C . A point P is located on the right branch of the hyperbola, and a point Q is on the left branch. A line segment PQ is drawn, and its perpendicular bisector is shown. The diagram includes various geometric constructions, including circles, lines, and angles, labeled with letters $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$ and numbers 1 through 8 .

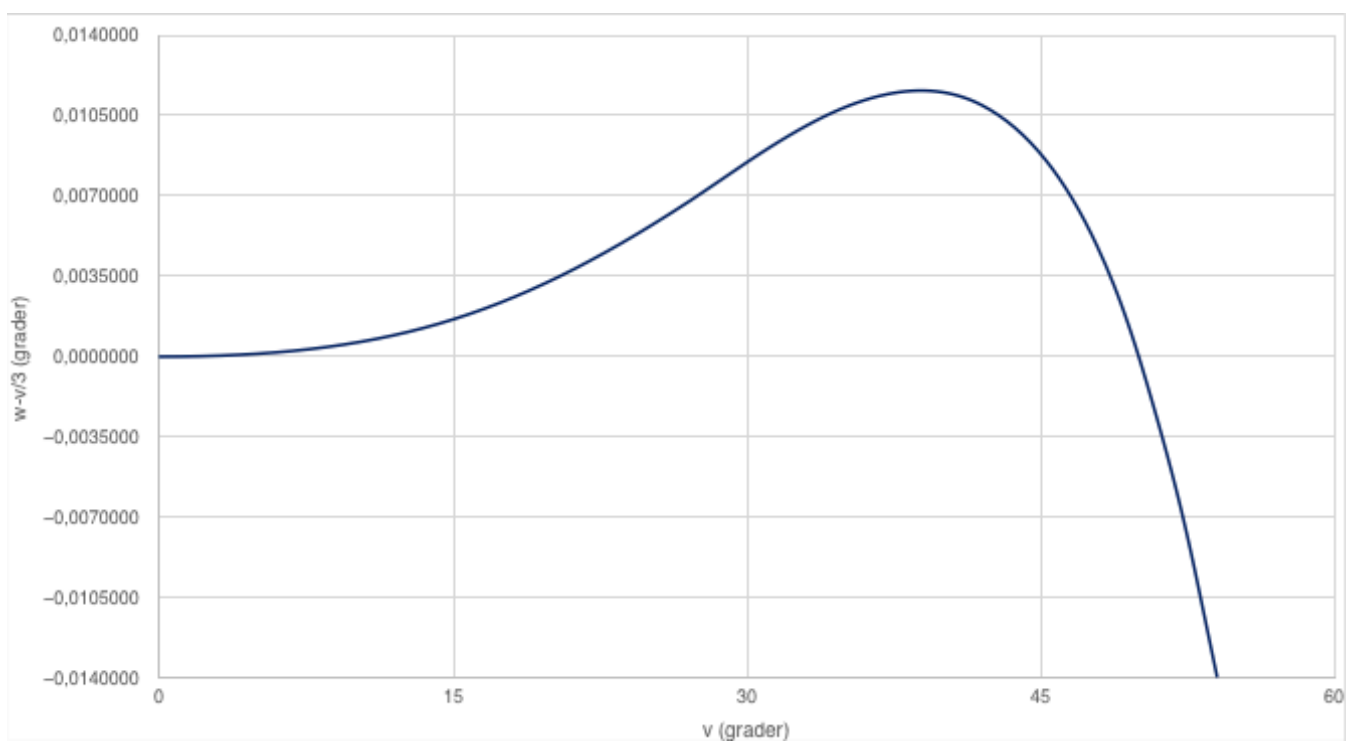
$$w - \frac{v}{3} = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{\sin v}{2 + \cos v} \right) - \frac{v}{3} \text{ (grader) som funksjon av } v \text{ (grader)}$$


Fig. 3. Tredelningsavvikelsen i Werns vinkel w (ekv. 17) samt serieutvecklingen fr.o.m. tredjegradstermen av w (ekv. 18-20). Svart kurva (ekv. 17) ligger strax under röd (ekv. 18).

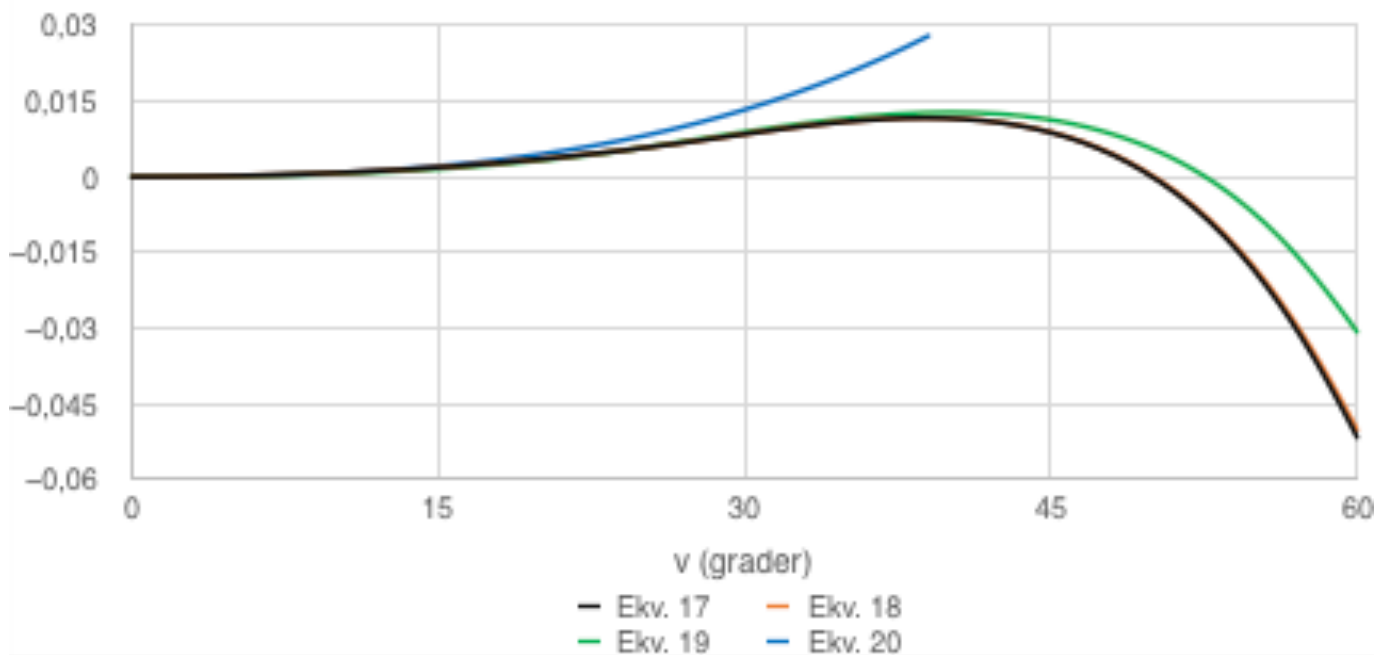
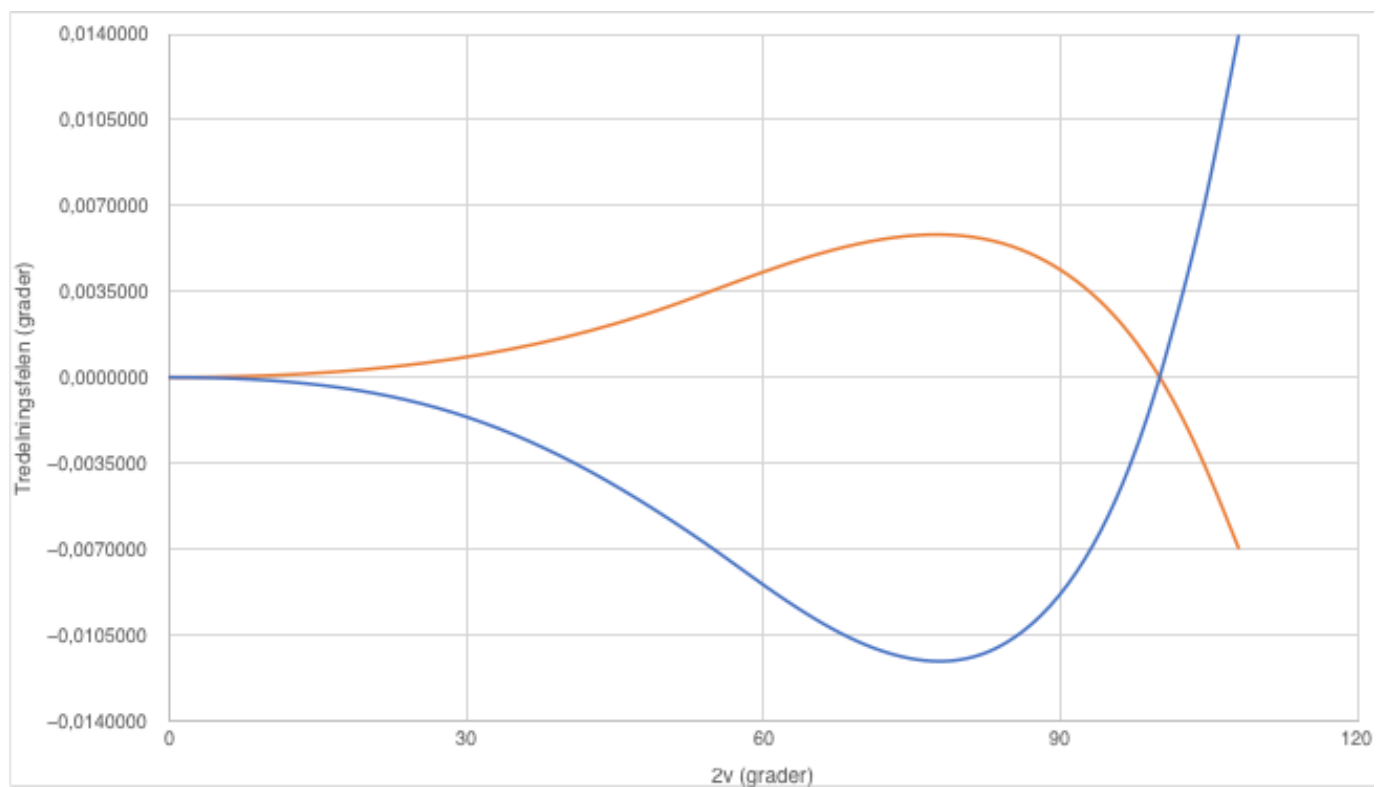


Fig. 4. Avvikelserna från exakt tredelning i andra steget av Werns konstruktion.

$\angle W_1BR_1 - \frac{1}{3}\angle ABC$ (blå)

$\angle R_1BC - \frac{1}{3}\angle ABC$ ($\angle ABW_1 - \frac{1}{3}\angle ABC$) (röd)



Tabell 1. Avvikelsen från exakt tredelning i första steget av Werns konstruktion.

$$w = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{\sin v}{2 + \cos v} \right)$$

$\angle KBC = v$ (grader)	$\angle KBR = w$ (grader)	$v/3$ (grader)	$w - v/3$ (grader)
0	0,000000	0,000000	0,000000
3	1,000013	1,000000	0,000013
6	2,000100	2,000000	0,000100
9	3,000333	3,000000	0,000333
12	4,000770	4,000000	0,000770
15	5,001456	5,000000	0,001456
18	6,002416	6,000000	0,002416
21	7,003646	7,000000	0,003646
24	8,005112	8,000000	0,005112
27	9,006739	9,000000	0,006739
30	10,008405	10,000000	0,008405
33	11,009936	11,000000	0,009936
36	12,011091	12,000000	0,011091
39	13,011560	13,000000	0,011560
42	14,010945	14,000000	0,010945
45	15,008755	15,000000	0,008755
48	16,004389	16,000000	0,004389
51	16,997122	17,000000	-0,002878
54	17,986088	18,000000	-0,013912

Tabell 2. Avvikelserna från exakt tredelning i andra steget av Werns konstruktion.

$\angle ABC$ (grader)	$\angle W_1BR_1$ (grader)	$\angle R_1BC$ (grader)	$\angle W_1BR_1 - (\angle ABC)/3$ (grader)	$\angle R_1BC - (\angle ABC)/3$ $\angle ABW_1 - (\angle ABC)/3$ (grader)
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
6	1,999987	2,000006	-0,000013	0,000006
12	3,999900	4,000050	-0,000100	0,000050
18	5,999667	6,000166	-0,000333	0,000166
24	7,999230	8,000385	-0,000770	0,000385
30	9,998544	10,000728	-0,001456	0,000728
36	11,997584	12,001208	-0,002416	0,001208
42	13,996354	14,001823	-0,003646	0,001823
48	15,994888	16,002556	-0,005112	0,002556
54	17,993261	18,003369	-0,006739	0,003369
60	19,991595	20,004203	-0,008405	0,004203
66	21,990064	22,004968	-0,009936	0,004968
72	23,988909	24,005546	-0,011091	0,005546
78	25,988440	26,005780	-0,011560	0,005780
84	27,989055	28,005472	-0,010945	0,005472
90	29,991245	30,004377	-0,008755	0,004377
96	31,995611	32,002194	-0,004389	0,002194
102	34,002878	33,998561	0,002878	-0,001439
108	36,013912	35,993044	0,013912	-0,006956

Enskede den 19 juni 2022

Åke Tegengren

Matematikingenjör